Tentamen functietheorie 1, 24-2-1995

1. (a) Gegeven $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ en $\mathrm{Im} f(x+iy) = 4xy^3 + ax^3y$ waarin $z = x+iy, x, y \in \mathbf{R}$ en a een reële constante is. Bepaal a zo, dat $\mathrm{Im} f$ harmonisch is.
4 Bepaal voor deze waarde van a alle functies f die geheel zijn en het hierboven gegeven imaginaire deel hebben. Druk deze functies f uit in de complexe variabele z.

   (b) Gegeven is een analytische functie g op de schijf $|z| < 1$ waarbij

$$\int_C \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = 1 \text{ voor alle } n \in \mathbf{N}.$$

5 Hierin is C een in positieve zin doorlopen cirkel met middelpunt 0 en straal $\frac{1}{4}$. Bepaal g en toon aan dat g een analytische voortzetting bezit op $\mathbf{C} \setminus \{1\}$.

2. (a) Bepaal het residu in de singulariteiten in $\mathbf{C}$ van

$$z^2(e^{1/z} - z^{-3}).$$

2 Evenzo van

$$\frac{\sin z}{z^3} + \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}.$$

Bepaal voor beide functies ook de aard van de singulariteiten.

5 (b) Gegeven f is analytisch voor $|z| < 3, f$ heeft een k^e orde nulpunt in 0 waarbij $k \in \mathbf{N}$ en $|f(z)| \leq 1$ als $|z| = 2$. Bewijs

$$|f(z)| \leq |\frac{z}{2}|^k \text{ als } |z| \leq 2.$$

3. Bewijs

9
$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)(x+2)} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(2^{1/3} - 1)$$

als $x^{1/3}$ op de integratieweg positief is.

4. (a) Bepaal de hoofdwaarde van

6
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x-i)^2} dx.$$

3 (b) Bepaal $\int_C (z + \frac{1}{2})\Gamma(2z) dz$ als C de in positieve zin doorlopen cirkel met middelpunt 0 en straal $\frac{3}{4}$ is.